دوشنبه
۱۴۰۴/۰۱/۱۱

حرکت بر خط راست
(فصل ۱ دوازدهم)

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی
فیزیک

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی	سجاد صادقی‌زاده ـ کامران ابراهیمی محسن قندچلر ـ آروین صالحی حسین عبدوی‌نژاد ـ امیررضا خوینی‌ها محمدجواد سورچی	محمدجواد سورچی پویا هدایتی

هفتهٔ اول	هفتهٔ دوم		هفتهٔ سوم		هفتهٔ چهارم		هفتهٔ پنجم	هفتهٔ ششم
۱ و ۲ دهم	۳، ۴ و ۵ دهم	۱ یازدهم	۲ یازدهم	۳ و ۴ یازدهم	۱ دوازدهم	۲ دوازدهم	۳ و ۴ دوازدهم	۵ و ۶ دوازدهم

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

اهمیت مباحث این آزمون در کنکور...

فیزیک دوازدهم خودش به‌تنهایی نصف سؤالای فیزیک کنکورتون رو شامل می‌شه، پس حتماً فیزیک دوازدهم رو جدی بگیرید! در این آزمون تست‌های خوبی از فصل «حرکت‌شناسی» براتون آماده کردیم که بدون اغراق می‌شه گفت همهٔ مباحث مهم این فصل رو پوشش داده و کلی می‌تونه برای یادگیری و مرور کمکتون کنه. قبل از بررسی سؤالات آزمون، بهتره که یکم با فصل «حرکت‌شناسی» که اولین فصل فیزیک دوازدهمه آشنا بشیم.

فصل ۱ فیزیک دوازدهم

۱- مباحث اصلی این فصل چیا هستن؟

این فصل هم طولانیه و مباحث زیادی داره و هم این‌که مباحثش به‌راحتی با همدیگه و با فصلای دیگه (مثل کار و انرژی یا دینامیک) ترکیب می‌شن و اگه بخوایم مباحث رو تیتروار بهتون بگیم، به نمودار زیر می‌رسیم.

حرکت‌شناسی
- مفاهیم اولیهٔ حرکت مثل مسافت، جابه‌جایی، تندی و سرعت
- حرکت با سرعت ثابت روی خط راست
- حرکت با شتاب ثابت روی خط راست
- انواع نمودارهای حرکت
- بررسی حرکت دو جسم
- بررسی حرکت دو یا چندمرحله‌ای
- سقوط آزاد

بچه‌ها حواستون باشه که همیشه امکان طرح تست‌های جدید و نوآورانه در این فصل وجود داره و ممکنه شما سر جلسهٔ کنکور با تست‌های چالش‌برانگیزی از فصل «حرکت‌شناسی» روبه‌رو بشین، پس نیازه خیلی خوب مسلط بشین روی این فصل و تعداد تست‌های زیادی از اون حل کنین!

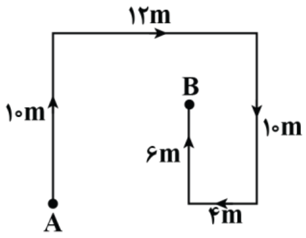
۲- در کنکورهای اخیر چند سؤال از این فصل اومده؟

در جدول زیر، تعداد سؤالاتی که از این فصل در کنکور اومده رو براتون آوردیم. همون‌طور که می‌بینید، معمولاً انتظار اومدن ۴ تست رو از این فصل داریم.

سال / رشته	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول)	۱۴۰۲ (نوبت دوم)	۱۴۰۳ (نوبت اول)	۱۴۰۳ (نوبت دوم)
تجربی	۳	۴	۴	۴	۴	۴	۴
ریاضی	۵	۴	۵	۴	۴	۴	۴

۱- متحرکی مسیر A تا B را مطابق شکل زیر می‌پیماید. بزرگی جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط این متحرک به‌ترتیب از راست به چپ چند متر است؟

۱) ۱۰، ۴۲
۲) ۱۰، ۴۰
۳) ۱۴، ۴۲
۴) ۱۴، ۴۰

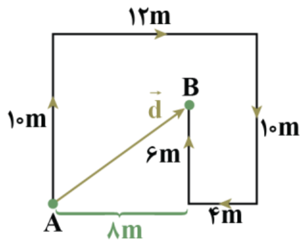


پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

گام اول:

جابه‌جایی برابر طول خط واصل بین نقاط A و B است.

$$d=\sqrt{8^2+6^2}=10\,m$$



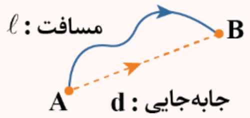
گام آخر:

مسافت طی‌شده برابر طول واقعی مسیر طی‌شده است.

$$\ell=10+12+10+4+6=42\,m$$

مقایسهٔ مسافت و جابه‌جایی، تندی متوسط و سرعت متوسط

۱- در شکل زیر، متحرک از مسیر نشان‌داده‌شده از A به B می‌رود. در این صورت طول مسیر واقعی برابر مسافت طی‌شده است و طول پاره‌خطی که A را به B وصل می‌کند برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است (درواقع جابه‌جایی کوتاه‌ترین مسافت میان دو نقطه است). به شکل زیر دقت کنید:



۲- مسافت، کمیتی نرده‌ای است، درحالی‌که جابه‌جایی، کمیتی برداری است و جهت دارد.

۳- یکای مسافت و جابه‌جایی، هر دو در SI برابر متر (m) است.

۴- اندازهٔ جابه‌جایی همواره کوچک‌تر یا مساوی مسافت طی‌شده است.

$$|\vec{d}|\le\ell$$

۵- در شرایطی جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه هستند که متحرک تغییر جهت ندهد.

مثال

در کدام‌یک از حرکت‌های زیر، مسافت طی‌شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است؟

الف: اتومبیلی که در مسیر مستقیم به سمت شمال حرکت می‌کند.

ب: اتومبیلی که ابتدا در مسیر مستقیم به سمت شمال حرکت می‌کند و سپس در مسیر مستقیم به سمت شرق می‌رود.

پ: ماهواره‌ای که در مسیر دایره‌ای دور کرهٔ زمین می‌چرخد.

ت: شناگری که طول استخر را شنا می‌کند و دوباره به مکان اولیهٔ خود برمی‌گردد.

پاسخ: مطابق نکات فوق، برای آن‌که در حرکتی مسافت طی‌شده هم‌اندازهٔ جابه‌جایی باشد، حرکت باید بدون هیچ‌گونه تغییر جهتی انجام شود و در مسیر مستقیم باشد. در بین عبارت‌های داده‌شده، فقط در عبارت «الف» متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت حرکت می‌کند.

۶- با تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان حرکت، تندی متوسط حرکت به‌دست می‌آید:

$$s_{av}=\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}=\frac{\ell}{\Delta t}$$

۷- با تقسیم جابه‌جایی بر زمان حرکت، سرعت متوسط به‌دست می‌آید:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\text{بردار جابه‌جایی}}{\text{زمان}}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

۸- تندی متوسط، کمیتی نرده‌ای است، درحالی‌که سرعت متوسط، کمیتی برداری است.

۹- اندازهٔ سرعت متوسط همواره کوچک‌تر یا مساوی تندی متوسط است. هنگامی این دو کمیت هم‌اندازه هستند که متحرک روی مسیر مستقیم بدون تغییر جهت حرکت کند.

۱۰- در حرکت بر روی محور x برای محاسبهٔ جابه‌جایی و سرعت متوسط داریم:

$$\vec{d}=\Delta\vec{x}=\vec{x}_2-\vec{x}_1$$

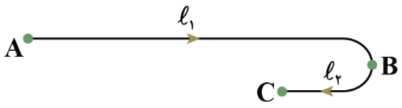
$$\Rightarrow\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

۲- متحرکی ابتدا بدون تغییر جهت در مدت ۴s در جهت محور x از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت می‌کند، سپس در نقطهٔ B تغییر جهت می‌دهد و در مدت ۴s تا نقطهٔ C بازمی‌گردد. اگر سرعت متوسط و تندی متوسط آن در این مسیر به‌ترتیب $(8\frac{m}{s})\vec{i}$ و $12\frac{m}{s}$ باشد، فاصلهٔ AB چند متر است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸۰ ۳) ۹۶ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

با توجه به مثبت بودن سرعت متوسط، متحرک در مسیری مطابق شکل زیر، حرکت کرده است:



رابطهٔ (۱): $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 8=\frac{\ell_1-\ell_2}{8}\Rightarrow \ell_1-\ell_2=64m$

رابطهٔ (۲): $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 12=\frac{\ell_1+\ell_2}{8}\Rightarrow \ell_1+\ell_2=96m$

با جمع کردن دو طرف رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$2\ell_1=96+64=160m\Rightarrow \ell_1=80m$

گروه آموزشی ماز

۳- کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف: در یک بازهٔ زمانی، بردار سرعت متوسط هم‌جهت با بردار تغییرات سرعت است.

ب: اگر متحرک با تندی ثابت حرکت کند، سرعت متوسط و تندی متوسط آن هم‌اندازه‌اند.

پ: در یک بازهٔ زمانی، بردار شتاب متوسط هم‌جهت با بردار تغییرات سرعت است.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «پ» ۳) «الف» ۴) «پ»

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۴۰۱)

بررسی موارد:

الف

طبق رابطهٔ $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$، سرعت متوسط با بردار جابه‌جایی هم‌جهت است. (✗)

ب

ممکن است جهت حرکت تغییر کند و سرعت متوسط و تندی متوسط برابر نشوند. (✗)

پ

طبق رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$، شتاب متوسط با بردار تغییرات سرعت هم‌جهت است. (✓)

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

وقتی اندازه یا جهت بردار سرعت متحرک تغییر کند آن حرکت شتاب‌دار است.

نکته

با توجه به این‌که بردار سرعت در هر نقطه از مسیر، بر مسیر حرکت مماس است با تغییر مسیر حرکت قطعاً بردار سرعت نیز تغییر جهت دارد.

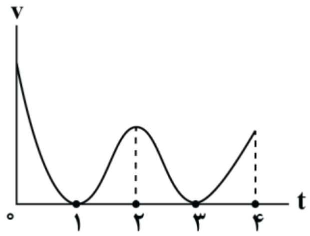
شتاب متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه t_1 تا t_2 به‌صورت رابطهٔ زیر تعریف می‌شود که در آن $\vec{v}_1$ سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 و $\vec{v}_2$ سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 است:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}$$

یکای شتاب متوسط $\frac{m}{s^2}$ است. شتاب متوسط، کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $\Delta\vec{v}$ است. اگر $\Delta t\to 0$ میل کند $t_2\to t_1$ میل کرده و شتاب متوسط برابر شتاب در لحظهٔ t_1 خواهد شد.

گروه آموزشی ماز

۴- نمودار سرعت ـ زمان حرکت متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟



الف: متحرک دو بار متوقف شده است.

ب: متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.

پ: در ثانیهٔ سوم حرکت، متحرک در خلاف جهت محور x درحال حرکت است.

ت: بردار شتاب متحرک در بازهٔ زمانی $t = 1s$ تا $t = 4s$ همواره در جهت محور x است.

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱   (متوسط ـ نموداری ـ ۱۴۰۱)

بررسی موارد:

الف

جسم در صورتی متوقف می‌شود که سرعت آن صفر شده باشد که در لحظات $t = 1s$ و $t = 3s$ سرعت متحرک صفر شده است. (✓)

ب

تغییر جهت دو شرط دارد ۱) سرعت صفر شود. ۲) علامت سرعت تغییر کند.

در لحظات $t = 1s$ و $t = 3s$ با آن‌که سرعت صفر شده ولی علامت سرعت تغییری نمی‌کند؛ بنابراین تغییر جهت انجام نشده است. (✗)

پ

در ثانیهٔ سوم، سرعت مثبت بوده؛ بنابراین حرکت در جهت مثبت محور x می‌باشد. (✗)

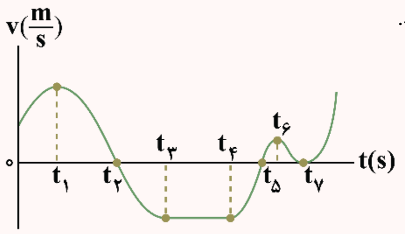
ت

با توجه به این‌که شیب نمودار سرعت ـ زمان برابر شتاب است، ابتدا در بازهٔ $1s < t < 2s$، شتاب در جهت محور x است و سپس در بازهٔ $2s < t < 3s$ در خلاف جهت محور x است و درنهایت در بازهٔ $3s < t < 4s$ در جهت محور x است. (✗)

نمودار سرعت ـ زمان

در این درس‌نامه به مرورِ نکاتی می‌پردازیم که می‌توان آن‌ها را از نمودار سرعت ـ زمان حرکت یک متحرک به‌دست آورد.

برای این منظور نمودار سرعت ـ زمان زیر را درنظر بگیرید که مربوط به متحرکی است که روی محور x در حرکت است.



۱- جهت حرکت: هنگامی‌که سرعت جسم مثبت باشد، جسم درحال حرکت در جهت محور x می‌باشد و هنگامی‌که سرعت منفی باشد، جسم در خلاف جهت محور x در حرکت است. مثلاً در نمودار داده‌شده، در بازه‌ی صفر تا t_2 و از لحظهٔ t_5 به بعد متحرک درحال حرکت در جهت محور x است و در بازهٔ t_2 تا t_5 درحال حرکت در خلاف جهت محور x است. البته دقت کنید در خود لحظات t_2، t_5 و t_7 سرعت برای لحظه‌ای صفر شده و متحرک به‌طور لحظه‌ای متوقف شده است.

۲- لحظات تغییر جهت: هنگامی‌که علامت سرعت تغییر کند، متحرک تغییر جهت داده است. درواقع لحظاتی که نمودار سرعت ـ زمان محور افقی را قطع کرده و از آن عبور کند، لحظات تغییر جهت حرکت هستند. مثلاً در نمودار داده‌شده، در لحظات t_2 و t_5، جهت حرکت عوض شده است. دقت کنید در لحظهٔ t_7، علامت سرعت عوض نشده است و درنتیجه متحرک تغییر جهت نداده است.

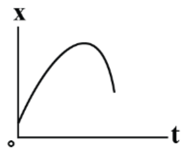
۳- شتاب لحظه‌ای حرکت: شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در هرلحظه نشان‌دهندهٔ شتاب حرکت در آن لحظه است. مثلاً در نمودار داده‌شده، در بازه‌های صفر تا t_1، t_4 تا t_6 و از لحظهٔ t_7 به بعد، شتاب حرکت مثبت است و در بازه‌های t_1 تا t_3 و t_6 تا t_7 شتاب منفی است. دقت کنید در بازهٔ t_3 تا t_4، نمودار افقی است و شتاب حرکت صفر است و درنتیجه متحرک با سرعت ثابت درحال حرکت است.

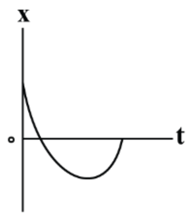
۴- شتاب متوسط حرکت: اگر دو نقطه از نمودار سرعت ـ زمان را با خط راست به‌هم وصل کنیم، شیب خط حاصل برابر شتاب متوسط حرکت در بازهٔ زمانی بین دو نقطه است.

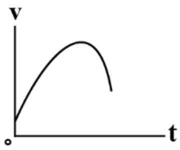
۵- تندشونده یا کندشونده بودن حرکت: هرگاه نمودار سرعت ـ زمان به محور افقی نزدیک شود، حرکت کندشونده است و هرگاه درحال دور شدن از محور افقی باشد، حرکت تندشونده خواهد بود. مثلاً در نمودار داده‌شده، در بازه‌های زمانی صفر تا t_1، t_2 تا t_3، t_5 تا t_6 و از لحظهٔ t_7 به بعد حرکت تندشونده است و در بازه‌های t_1 تا t_2، t_4 تا t_5 و t_6 تا t_7 حرکت کندشونده بوده است. تندشونده بودن حرکت به معنی آن است که تندی متحرک درحال افزایش است و کندشونده بودن حرکت به معنی آن است که تندی متحرک درحال کاهش است.

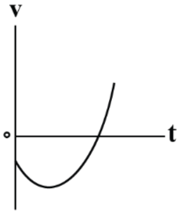
۶- علاوه‌بر نکات فوق، با استفاده از نمودار سرعت ـ زمان، می‌توان کمیت‌هایی مثل جابه‌جایی، مسافت طی‌شده، سرعت متوسط و تندی متوسط را هم به‌دست آورد که این مباحث را در آزمون بعد بررسی می‌کنیم.

۵- کدام سهمی زیر، مربوط به متحرکی است که با شتاب متغیر حرکت می‌کند و ابتدا دارای حرکت تندشونده است و ادامهٔ مسیر را فقط به‌صورت کندشونده ادامه می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ نموداری ـ ۱۴۰۱)

سهمی گزینهٔ (۳) مربوط به این متحرک است.

بررسی گزینه‌ها:

در گزینه‌های (۱) و (۲) چون نمودار مکان ـ زمان به‌صورت یک سهمی است، پس حرکت دارای شتاب ثابت است (رد گزینه‌های ۱ و ۲).

در گزینه‌های (۳) و (۴) چون نمودار سرعت ـ زمان دارای شیب متغیر است درنتیجه شتاب حرکت نیز متغیر است.

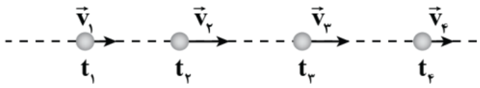
۳ ابتدا نمودار درحال دور شدن از محور t (تندشونده) و سپس درحال نزدیک شدن به محور t (کندشونده) است.

۴ ابتدا نمودار درحال دور شدن از محور t (تندشونده)، سپس درحال نزدیک شدن به محور t (کندشونده) و در پایان مجدد درحال دور شدن از محور t (تندشونده) است.

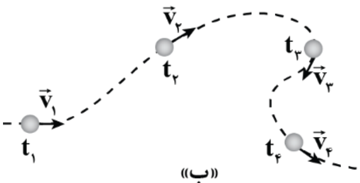
گروه آموزشی ماز

۶- در چه تعداد از شکل‌های زیر، متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند؟

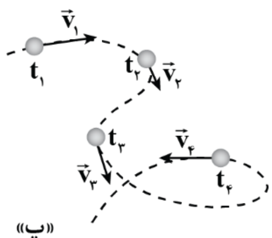
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴



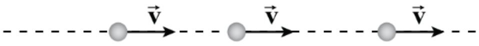
«الف»



«ب»



«پ»



«ت»

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۴۰۱)

فقط در شکل «ت»، بردار سرعت جسم ثابت است؛ یعنی هم‌اندازه و هم‌جهت سرعت جسم، ثابت مانده و جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در بقیهٔ شکل‌ها یا جهت سرعت یا اندازهٔ سرعت و یا هر دو مورد تغییر کرده‌اند و حرکت جسم شتاب‌دار است.

گروه آموزشی ماز

۷- متحرکی با سرعت ثابت درحال حرکت است. اگر این متحرک در لحظات $t_1 = ۴s$ و $t_2 = ۷s$ به‌ترتیب از مکان‌های $x_1 = -۱۶m$ و $x_2 = -۴m$ عبور کند، در کدام لحظه از مبدأ مکان می‌گذرد؟

۱) پایان ثانیهٔ هفتم
۲) پایان ثانیهٔ هشتم
۳) پایان ثانیهٔ نهم
۴) پایان ثانیهٔ دهم

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۴-(-۱۶)}{۷-۴} = \frac{۱۲}{۳} = ۴\frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_\circ = ۴t + x_\circ \xrightarrow[x=-۱۶m]{t=۴s} -۱۶ = ۴\times ۴ + x_\circ \Rightarrow x_\circ = -۳۲m$$

در ادامه لحظهٔ عبور از مبدأ مکان $(x = \circ)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x = ۴t - ۳۲ \Rightarrow \circ = ۴t - ۳۲ \Rightarrow t = ۸s$$

بنابراین در پایان ثانیهٔ هشتم $(t = 8s)$ متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد.

حرکت با سرعت ثابت

اگر در یک حرکت، بردار سرعت تغییر نکند، یعنی هم اندازهٔ سرعت (تندی) و هم جهت حرکت ثابت بماند، حرکت با سرعت ثابت انجام شده است. در حرکت با سرعت ثابت، متحرک بدون تغییر جهت و بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و سرعت آن در هر لحظهٔ دلخواه، با سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر است.
معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت برابر است با:

$x = vt + x_0$ $\qquad$ $v =$ مقداری ثابت

v: سرعت $\qquad$ x_0 : مکان اولیه

مثال

متحرکی با سرعت ثابت $v = (-4\frac{m}{s})\vec{i}$ از مکان اولیهٔ $x_0 = 6m$ شروع به حرکت می‌کند. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، متحرک از مبدأ محور x می‌گذرد؟

پاسخ تشریحی:

ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x = vt + x_0 \\ v = -4\frac{m}{s} \\ x_0 = 6m \end{cases} \to x = -4t + 6$$

در هنگام عبور از مبدأ محور، $x = 0$ است، بنابراین داریم:

$$x = -4t + 6 \xrightarrow{x=0} 0 = -4t + 6 \to t = 1/5s$$

گروه‌آموزشی ماز

۸ـ متحرکی در حرکت روی خط راست و بدون تغییر جهت، $\frac{1}{4}$ مسیر را با تندی $10\frac{m}{s}$، $\frac{1}{3}$ از باقی‌ماندهٔ مسیر را با تندی $20\frac{m}{s}$ و ادامهٔ مسیر را با تندی $40\frac{m}{s}$ طی می‌کند. تندی متوسط در کل مسیر چند واحد SI است؟

۱) ۱۲ $\qquad$ ۲) ۱۶ $\qquad$ ۳) ۲۰ $\qquad$ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ $\qquad$ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

مطابق سؤال درصورتی‌که کل مسافت طی‌شده توسط متحرک d باشد؛ طبق گفتهٔ مسئله این مسافت را به قسمت‌های مختلف تقسیم می‌کنیم تا بازهٔ زمانی هر بخش را پیدا کنیم:

گام اول:

متحرک مسافت $\frac{d}{4}$ را با تندی $10\frac{m}{s}$ طی می‌کند؛ بنابراین زمان صرف‌شده در این بخش به‌صورت زیر است:

$$\Delta t_1 = \frac{\ell_1}{v_1} = \frac{\frac{d}{4}}{10} = \frac{d}{40}$$

گام دوم:

در ادامه متحرک $\frac{1}{3}$ باقی مسیر، یعنی $\frac{1}{3}(d - \frac{d}{4}) = \frac{1}{3} \times \frac{3d}{4} = \frac{d}{4}$ را با تندی $20\frac{m}{s}$ طی می‌کند. زمان صرف‌شده در این بازه به‌صورت زیر است:

$$\Delta t_2 = \frac{\ell_2}{v_2} = \frac{\frac{d}{4}}{20} = \frac{d}{80}$$

گام سوم:

متحرک باقی مسیر $(d - (\frac{d}{4} + \frac{d}{4}) = \frac{d}{2})$ را نیز با تندی $40\frac{m}{s}$ طی می‌کند. زمان صرف‌شده در این بازه نیز به‌صورت زیر است:

$$\Delta t_3 = \frac{\ell_3}{v_3} = \frac{\frac{d}{2}}{40} = \frac{d}{80}$$

گام آخر:

تندی متوسط متحرک را در کل مسیر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}=\frac{\ell_۱+\ell_۲+\ell_۳}{\Delta t_۱+\Delta t_۲+\Delta t_۳}=\frac{d}{\frac{d}{۴۰}+\frac{d}{۸۰}+\frac{d}{۸۰}}=\frac{d}{\frac{d}{۲۰}}=۲۰\frac{m}{s}$$

نکته

اگر جابه‌جایی متحرکی در بازه‌های زمانی متوالی $\Delta t_۱$، $\Delta t_۲$، ... به‌ترتیب برابر $\Delta x_۱$، $\Delta x_۲$ و ... باشد، آن‌گاه جابه‌جایی کل متحرک برابر $\Delta x_{\text{کل}}=\Delta x_۱+\Delta x_۲+\ldots$ است و سرعت متوسط متحرک در کل حرکت برابر $v_{av}=\frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲+\cdots}{\Delta t_۱+\Delta t_۲+\cdots}$ است.

گروه آموزشی ماز

۹- مطابق شکل زیر، قطار (۱) به طول ۴۰۰ متر با تندی ثابت $۷۲\frac{km}{h}$ و قطار (۲) به طول ۳۰۰ متر با تندی ثابت $۱۸\frac{km}{h}$ به‌طرف یکدیگر در مسیری مستقیم و در دو ریل موازی درحال حرکت هستند. اگر مکان جلوی دو قطار در یک لحظه برابر $x_A=-۵۵۰m$ و $x_B=۰$ باشد، در لحظه‌ای که دو قطار به‌طور کامل از کنار یکدیگر عبور می‌کنند، جلوی قطار (۱) در فاصلهٔ چندمتری از مبدأ مکان قرار دارد؟

۱) ۴۵۰

۲) ۱۰۰

۳) ۲۵۰

۴) ۳۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

گام اول:

تندی هرکدام از قطارها را به واحد SI $(\frac{m}{s})$ تبدیل می‌کنیم.

$$v_۱=۷۲\frac{km}{h}\xrightarrow{\div ۳/۶}۲۰\frac{m}{s}$$

$$v_۲=۱۸\frac{km}{h}\xrightarrow{\div ۳/۶}۵\frac{m}{s}$$

گام دوم:

لازم است مدت‌زمانی که طول می‌کشد دو قطار به‌طور کامل از همدیگر عبور کنند را به‌دست آوریم. به این منظور می‌توانیم یکی از قطارها را ساکن درنظر گرفته و قطار دیگری با مجموع مقدار سرعت دو قطار درحال حرکت باشد.

$$v'_{\text{نسبی}}=|v_۱|+|v_۲|$$

همچنین مسافتی که باید طی شود، برابر با مجموع طول دو قطار و فاصلهٔ اولیهٔ بین دو نقطهٔ A و B است؛ زیرا هرکدام از قطارها برای آن‌که به‌طور کامل از دیگری عبور کند، باید علاوه‌بر فاصلهٔ بین B و A تمام طول خودش و تمام طول قطاری که ثابت فرض شده را طی کند:

$$d=v'\Delta t\Rightarrow (۴۰۰+۳۰۰+(x_B-x_A))=(۲۰+۵)\times\Delta t$$

$$\Rightarrow ۷۰۰+(۰-(-۵۵۰))=۲۵\Delta t\Rightarrow ۱۲۵۰=۲۵\Delta t\Rightarrow \Delta t=۵۰s$$

گام آخر:

حال با توجه به این‌که Δt را حساب کرده‌ایم، رابطهٔ سرعت ثابت را برای قطار (۱) می‌نویسیم:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow \Delta x=۵۰\times ۲۰\Rightarrow x'_A-(-۵۵۰)=۱۰۰۰\Rightarrow x'_A=۱۰۰۰-۵۵۰=۴۵۰m$$

بنابراین ابتدای قطار (۱) در فاصلهٔ ۴۵۰ متری مبدأ مکان قرار دارد.

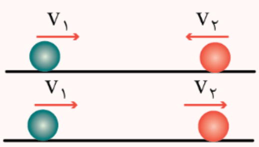
تذکر!

باید به این نکته توجه داشت که چون قطار (۲) در خلاف جهت محور x درحال حرکت است، سرعت آن $v_۲=-۵\frac{m}{s}$ است.

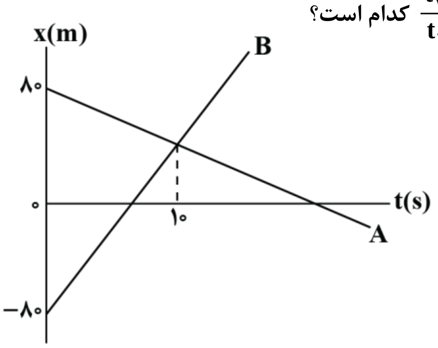
سرعت نسبی

۱- اگر دو متحرک خلاف جهت یکدیگر حرکت کنند: $v_{\text{نسبی}}=|v_۱|+|v_۲|$

۲- اگر دو متحرک هم‌جهت حرکت کنند: $v_{\text{نسبی}}=|v_۱-v_۲|$



۱۰- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک که با سرعت ثابت، بر روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متحرک B، $۴\frac{m}{s}$ بیش‌تر از تندی متحرک A باشد و متحرک B در لحظهٔ $t_۱$ و متحرک A در لحظهٔ $t_۲$ از مبدأ مکان بگذرند، نسبت $\frac{t_۲}{t_۱}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) ۳
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

مطابق نمودار، فاصلهٔ اولیهٔ دو متحرک برابر $۸۰-(-۸۰)=۱۶۰m$ بوده است که در مدت ۱۰ ثانیه، این فاصله به صفر رسیده است، بنابراین اندازهٔ سرعت نسبی دو متحرک برابر است با:

$$v_{\text{نسبی}}=\frac{۱۶۰}{۱۰}=۱۶\frac{m}{s}$$

طبق متن سؤال، اگر تندی A برابر v باشد، تندی حرکت B برابر $v+۴\frac{m}{s}$ است و چون دو متحرک به‌هم نزدیک می‌شوند، داریم:

$$v_{\text{نسبی}}=v+v+۴=۲v+۴\Rightarrow ۱۶=۲v+۴\Rightarrow v=۶\frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت A برابر $v_A=-۶\frac{m}{s}$ و سرعت B برابر $v_B=۱۰\frac{m}{s}$ است و برای یافتن لحظهٔ عبور آن‌ها از مبدأ می‌توان نوشت:

$$x_B=v_Bt+x_{\circ B}=۱۰t-۸۰\xrightarrow[t=t_۱]{x_B=۰}۰=۱۰t_۱-۸۰\Rightarrow t_۱=۸s$$

$$x_A=v_At+x_{\circ A}=-۶t+۸۰\xrightarrow[t=t_۲]{x_A=۰}۰=-۶t_۲+۸۰\Rightarrow t_۲=\frac{۴۰}{۳}s$$

$$\Rightarrow\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{\frac{۴۰}{۳}}{۸}=\frac{۵}{۳}$$

حرکت با سرعت ثابت

حرکتی است که در آن اندازهٔ سرعت (تندی) متحرک و جهت آن در طول مسیر، ثابت است.

معادلهٔ مکان ـ زمان یک متحرک که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، به شکل زیر است:

$$x=vt+x_\circ$$

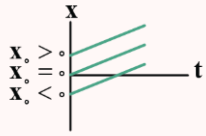
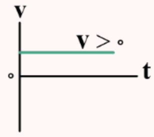
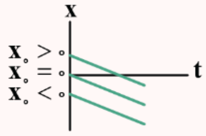
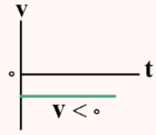
سرعت متحرک $(\frac{m}{s})$

مکان اولیهٔ متحرک (m)

مکان نهایی متحرک (m)

در حرکت با سرعت ثابت	
۱- سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط باهم برابرند: $v_{av}=v$	
۲- شتاب حرکت، صفر است.	
۳- اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت باهم برابرند $(\|d\|=L)$، درنتیجه در این حرکت اندازهٔ سرعت برابر تندی است $(\|v\|=s)$.	

به نمودارهای مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت توجه کنید:

نوع حرکت / معادله	مکان ـ زمان $x = vt + x_0$	سرعت ـ زمان $v =$ ثابت
حرکت یکنواخت در جهت محور x		
حرکت یکنواخت در خلاف جهت محور x		

گروه آموزشی ماز

۱۱- در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، متحرکی در لحظات $t=۲s$، $t=۳s$ و $t=۵s$ به‌ترتیب از مکان‌های $x=-۲m$، $x=۲m$ و $x=۱۶m$ عبور می‌کند. به‌ترتیب از راست به چپ، بردارهای شتاب و سرعت اولیهٔ این متحرک در SI کدام است؟

۱) $(-۱\frac{m}{s})\vec{i}\ ,\ (-۲\frac{m}{s^۲})\vec{i}$

۲) $(۱\frac{m}{s})\vec{i}\ ,\ (-۲\frac{m}{s^۲})\vec{i}$

۳) $(-۱\frac{m}{s})\vec{i}\ ,\ (۲\frac{m}{s^۲})\vec{i}$

۴) $(۱\frac{m}{s})\vec{i}\ ,\ (۲\frac{m}{s^۲})\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

گام اول:

معادلهٔ مکان ـ زمان برای حرکت با شتاب ثابت به‌صورت زیر است:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_0 t + x_0$$

گام دوم:

هرکدام از لحظات و مکان‌های مرتبط را به‌صورت جداگانه در معادلهٔ فوق جایگذاری می‌کنیم:

$$t=۲s\ ,\ x=-۲m \Rightarrow -۲ = \frac{۱}{۲}\times a\times(۲)^۲ + v_0\times ۲ + x_0 \Rightarrow -۲ = ۲a + ۲v_0 + x_0$$

$$t=۳s\ ,\ x=۲m \Rightarrow ۲ = \frac{۱}{۲}\times a\times(۳)^۲ + v_0\times ۳ + x_0 \Rightarrow ۲ = \frac{۹}{۲}a + ۳v_0 + x_0$$

$$t=۵s\ ,\ x=۱۶m \Rightarrow ۱۶ = \frac{۱}{۲}\times a\times(۵)^۲ + v_0\times ۵ + x_0 \Rightarrow ۱۶ = \frac{۲۵}{۲}a + ۵v_0 + x_0$$

گام آخر:

دستگاه سه معادله سه مجهول فوق را حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱۶-۲ = (\frac{۲۵}{۲}a + ۵v_0 + x_0) - (\frac{۹}{۲}a + ۳v_0 + x_0) \Rightarrow ۱۴ = ۸a + ۲v_0 \Rightarrow ۷ = ۴a + v_0 \\ ۲-(-۲) = (\frac{۹}{۲}a + ۳v_0 + x_0) - (۲a + ۲v_0 + x_0) \Rightarrow ۴ = \frac{۵}{۲}a + v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}\ ,\ v_0 = -۱\frac{m}{s}\ ,\ x_0 = -۴m$$

بنابراین بردارهای شتاب و سرعت اولیه برابرند با:

$$\vec{a} = (۲\frac{m}{s^۲})\vec{i} \qquad , \qquad \vec{v}_0 = (-۱\frac{m}{s})\vec{i}$$

حرکت با شتاب ثابت

هرگاه بردار شتاب متحرکی در لحظه‌های مختلف یکسان باشد، حرکت جسم را حرکت با شتاب ثابت می‌نامیم.

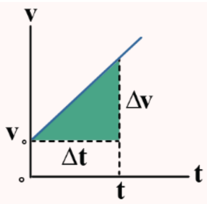
ویژگی‌های حرکت با شتاب ثابت:

۱- سرعت متحرک با زمان به‌صورت خطی تغییر می‌کند پس تغییرات v نسبت به t به‌صورت یک تابع خطی است به همین دلیل سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t برابر است با میانگین سرعت متحرک در این دو لحظه، یعنی:

معادلهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\text{حرکت با شتاب ثابت}} v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \Rightarrow v_{av} = v_{(\frac{t_۱+t_۲}{۲})} \xrightarrow{v=at+v_0} v_{av} = \frac{۱}{۲}a(t_۱+t_۲) + v_0$$

۲- شیب نمودار سرعت ـ زمان، ثابت است و برابر با شتاب متحرک می‌باشد.



$$\text{شیب نمودار سرعت ـ زمان} = a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

۳- شتاب متوسط در بازه‌های زمانی مختلف یکسان است.

شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی برابر شتاب لحظه‌ای متحرک است یعنی:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

۴- معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای که مکان متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

x: مکان متحرک در لحظهٔ t — a: شتاب ثابت متحرک

$\vec{v}_0$: سرعت اولیه — x_0 : مکان اولیه

در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک، تابعی درجهٔ دوم از زمان است.

۵- معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

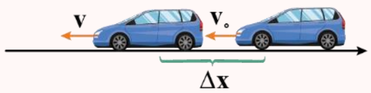
معادله‌ای است که سرعت متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$v = at + v_0$$

v: سرعت متحرک در لحظهٔ t — a: شتاب ثابت متحرک — v_0 : سرعت اولیه

۶- معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت:

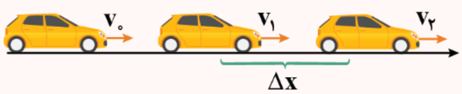
در این معادله زمان وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که زمان را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:



$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

۷- معادلهٔ مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت:

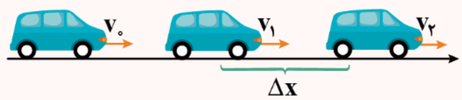
در این معادله شتاب وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که شتاب را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:



$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2}\Delta t$$

روش محاسبهٔ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت:

معادلهٔ جابه‌جایی زمان: (در بازهٔ t_1 تا t_2)



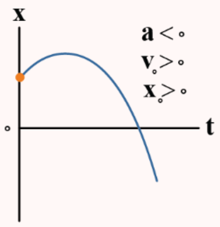
$$\Delta x = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_1\Delta t$$

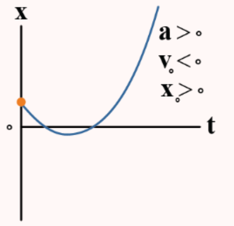
حالت خاص: جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $[0, t]$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

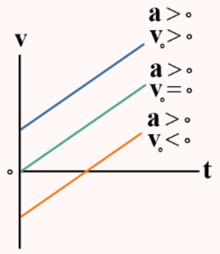
نمودارهای حرکت با شتاب ثابت

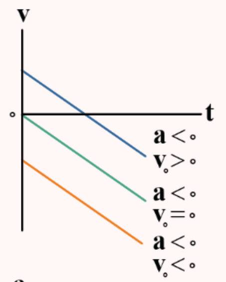
۱- نمودار مکان ـ زمان به شکل یک سهمی است که تقعر آن علامت شتاب را نشان می‌دهد.



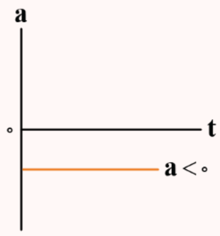


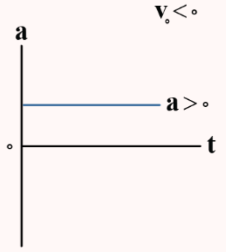
۲- نمودار سرعت ـ زمان به‌صورت یک خط با شیب ثابت است.





۳- نمودار شتاب ـ زمان به‌صورت یک خط افقی است.





نکته

در حرکت با شتاب ثابت اگر برای دو لحظهٔ t_1 و t_2 داشته باشیم $t_{\text{رأس سهمی}} = \frac{t_1+t_2}{2}$ آن‌گاه $v_{t_1} = -v_{t_2}$ می‌شود.

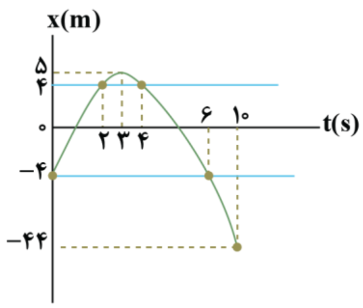
گروه آموزشی ماز

۱۲- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $x=-t^2+6t-4$ است. در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، حداکثر چند ثانیه فاصلهٔ متحرک تا مبدأ محور، بزرگ‌تر یا برابر ۴ متر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

ابتدا به کمک مختصات، عرض از مبدأ سهمی و رأس آن، نمودار سهمی را رسم می‌کنیم:



عرض از مبدأ سهمی: $t=0 \Rightarrow x_0=-4m$

رأس سهمی: $t=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{2}=3s \Rightarrow x=-9+18-4=5m$

در ادامه، زمان‌های مربوط به مکان‌های $+4m$ و $-4m$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=4 \Rightarrow -t^2+6t-4=4 \Rightarrow t^2-6t+8=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2s \\ t=4s \end{cases}$$

$$x=-4 \Rightarrow -t^2+6t-4=-4 \Rightarrow t^2-6t=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0s \\ t=6s \end{cases}$$

با توجه به نمودار، در بازهٔ زمانی ۲s تا ۴s و نیز در بازهٔ زمانی ۶s تا ۱۰s، فاصلهٔ متحرک از مبدأ محور، بزرگ‌تر یا برابر ۴ متر است، که درمجموع ۶s می‌شود.

گروه آموزشی ماز

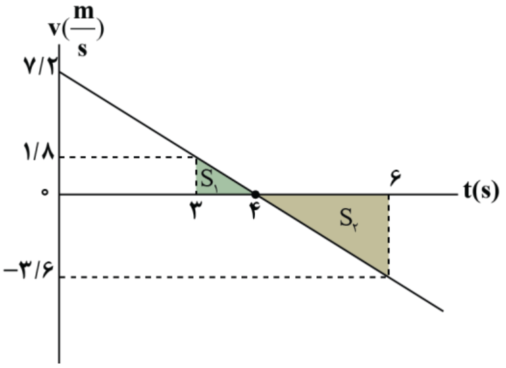
۱۳- معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند در SI به‌صورت $v=-1/8t+7/2$ است. در ۳ ثانیهٔ دوم حرکت، بزرگی سرعت متوسط متحرک چند برابر تندی متوسط آن است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم.

$$v=-1/8t+7/2 \xrightarrow{v=0} t=4s$$



در ۳ ثانیهٔ دوم حرکت، جابه‌جایی و مسافت برابرند با:

$$\Delta x=|S_1|-|S_2|=\frac{1/8\times 1}{2}-\frac{3/6\times 2}{2}=0/9-3/6=-2/7m$$

$$\ell=|S_1|+|S_2|=0/9+3/6=4/5m$$

بنابراین نسبت بزرگی سرعت متوسط به تندی متوسط برابر است با:

$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}}=\frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta t}}{\frac{\ell}{\Delta t}}=\frac{|\Delta x|}{\ell}\Rightarrow\frac{|v_{av}|}{s_{av}}=\frac{2/7}{4/5}=\frac{3}{5}$$

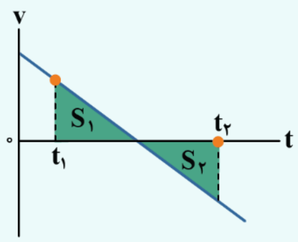
نکته

هنگامی که معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت به‌صورت درجهٔ ۲ است، حرکت با شتاب ثابت انجام می‌شود و به‌راحتی می‌توانیم معادلهٔ سرعت ـ زمان حرکت را بنویسیم.

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \rightarrow$ a و t از معادلهٔ مکان ـ زمان به‌دست می‌آیند.

$v=at+v_0 \rightarrow$ با جایگذاری a و t، معادلهٔ سرعت ـ زمان به‌دست می‌آید.

با داشتن معادلهٔ سرعت ـ زمان و رسم آن، به‌راحتی می‌توان مسافت، جابه‌جایی، تندی متوسط و سرعت متوسط را با کمک مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان به‌دست آورد.



جابه‌جایی در بازهٔ t_1 تا t_2: $\Delta x=|S_1|-|S_2|$

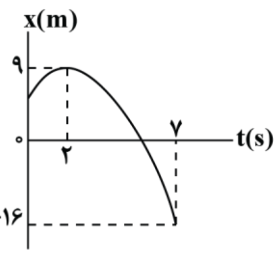
سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{|S_1|-|S_2|}{t_2-t_1}$

مسافت در بازهٔ t_1 تا t_2: $\ell=|S_1|+|S_2|$

تندی متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{|S_1|+|S_2|}{t_2-t_1}$

گروه آموزشی ماز

۱۴- با توجه به شکل زیر که نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور x درحال حرکت است را نشان می‌دهد، کدام موارد درست است؟



الف: متحرک در لحظهٔ $t=4s$ از مکان اولیهٔ خود می‌گذرد.

ب: جهت حرکت متحرک در لحظهٔ $t=2s$ تغییر می‌کند.

پ: جهت بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t=6s$ تغییر می‌کند.

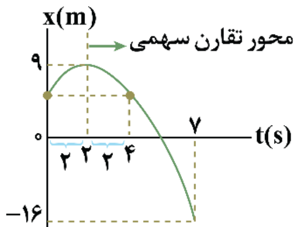
ت: از لحظهٔ $t=0$ تا لحظهٔ $t=6s$ مسافت طی‌شده توسط متحرک $\frac{5}{3}$ برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است.

۱) «الف»، «ب» و «پ»
۲) «الف»، «ب» و «ت»
۳) «ب»، «پ» و «ت»
۴) «الف»، «پ» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ نموداری ـ ۱۴۰۱)

الف

مطابق شکل مقابل با توجه به تقارن سهمی، درمی‌یابیم متحرک در لحظهٔ $t=4s$ از مکان اولیهٔ خود عبور می‌کند. (✓)



ب

در نقاط اکسترمم (قله - دره) نمودار $x-t$ متحرک تغییر جهت می‌دهد؛ بنابراین در لحظهٔ $t=2s$ جهت حرکت تغییر کرده است. (✓)

پ

با توجه به مکان متحرک در لحظه‌های $t_1 = 2s$ و $t_2 = 7s$ و سرعت متحرک در لحظهٔ $t_1 = 2s$ که برابر صفر است، معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را به‌دست آورده و لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان $x = 0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(\frac{v_1 + v_2}{2})\Delta t = \Delta x \xrightarrow[v_2 = v_{7s}\ ,\ \Delta t = 7-2 = 5s\ ,\ \Delta x = -16-9 = -25m]{v_1 = v_{2s} = 0}$$

$$(\frac{0 + v_{7s}}{2})5 = -25 \Rightarrow v_{7s} = -10\frac{m}{s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v_{7s} - v_{2s}}{7-2} = \frac{-10-0}{5} = -2\frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_1 = 0\ ,\ t_1 = 2s]{a = -2\frac{m}{s^2}} 0 = -2(2) + v_0 \Rightarrow v_0 = 4\frac{m}{s}$$

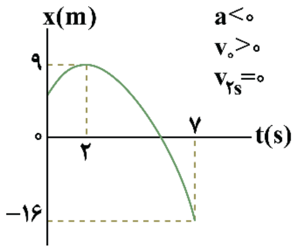
$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow[a = -2\frac{m}{s^2}\ ,\ v_0 = 4\frac{m}{s}]{x_1 = 9m\ ,\ t_1 = 2s} 9 = \frac{1}{2}(-2)(2)^2 + 4(2) + x_0 \Rightarrow x_0 = 5m$$

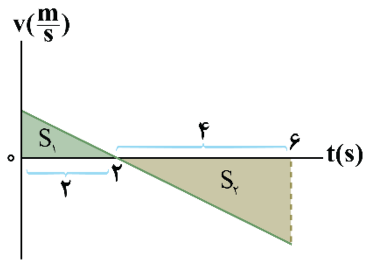
$$\Rightarrow x = -t^2 + 4t + 5 \Rightarrow x = -(t+1)(t-5) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1s & \text{غ ق ق} \\ t = 5s & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین در لحظهٔ $t = 5s$ بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد. (✗)

ت

با توجه به نمودار مکان ـ زمان، نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم:





می‌دانیم دو مثلث S_1 و S_2 متشابه‌اند؛ بنابراین داریم:

$$\frac{S_2}{S_1} = (\frac{4}{2})^2 = 4$$

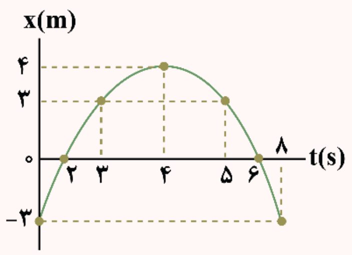
$$(0-6): \begin{cases} \Delta x = S_1 - S_2 = S_1 - 4S_1 = -3S_1 \\ \ell = S_1 + S_2 = S_1 + 4S_1 = 5S_1 \end{cases}$$

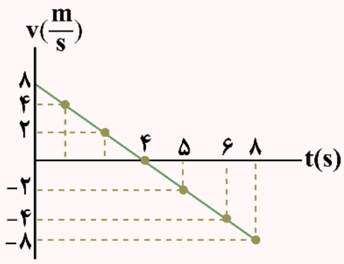
$$\Rightarrow \frac{\ell}{|\Delta x|} = \frac{5S_1}{3S_1} = \frac{5}{3}$$ (✓)

تقارن در حرکت با شتاب ثابت

حرکت شتاب ثابت نسبت به نقطه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد متقارن است.

مثال: دو نمودار زیر مربوط به حرکت یک متحرک می‌باشد.





مثلاً لحظات $t = 3s$ و $t = 5s$ نسبت به لحظهٔ $t = 4s$ تقارن دارند، یعنی:

۱- سرعت متحرک در این دو لحظه قرینهٔ یکدیگر است یعنی تندی متحرک در این لحظات برابر است:

$$\vec{v}_3 = -\vec{v}_5 \Rightarrow |v_3| = |v_5|$$

۲- مکان متحرک در این لحظات برابر است:

$$x_3 = x_5$$

۳- مدت‌زمانی که طول می‌کشد متحرک در هنگام رفت از مکان $x = 3m$ به مکان $x = 4m$ برسد برابر با مدت‌زمانی است که طول می‌کشد متحرک از $x = 4m$ به $x = 3m$ برسد.

۴- لحظهٔ $t = 4s$ میانگین لحظات $t = 3s$ و $t = 5s$ است.

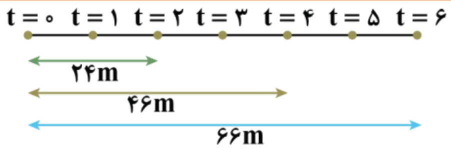
$$4 = \frac{3+5}{2}$$

۱۵- متحرکی با شتاب ثابت بر روی محور x بدون تغییر جهت، حرکت می‌کند و جابه‌جایی آن در ۲ ثانیهٔ اول، ۴ ثانیهٔ اول و ۶ ثانیهٔ اول حرکت به‌ترتیب ۲۴m، ۴۶m و ۶۶m است. نوع حرکت متحرک چگونه و اندازهٔ شتاب آن چند متر بر مربع ثانیه است؟

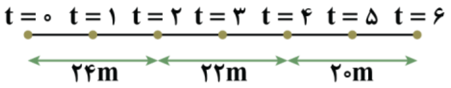
۱) کندشونده و $\frac{۱}{۲}$ ۲) کندشونده و ۱ ۳) تندشونده و $\frac{۱}{۲}$ ۴) تندشونده و ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

با توجه به جابه‌جایی‌های انجام‌گرفته و رسم مسیر حرکت، جابه‌جایی در ۲ ثانیه‌های اول، دوم و سوم به‌دست می‌آید.



همان‌طور که مشخص است، در ۲ ثانیه‌های متوالی، جابه‌جایی به‌اندازهٔ ۲ متر کاهش می‌یابد. درنتیجه حرکت کندشونده است.



نکته

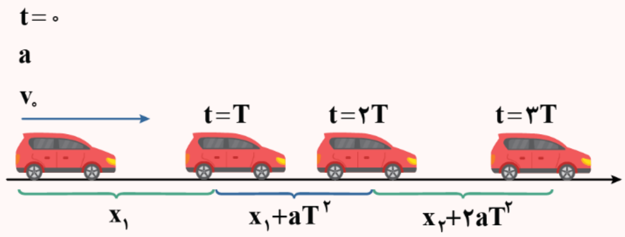
در حرکت با شتاب ثابت اگر تغییر جهت حرکت نداشته باشیم، اختلاف دو جابه‌جایی در T ثانیهٔ متوالی، برابر با $aT^۲$ است.

$$۲۲-۲۴=aT^۲ \xrightarrow{T=۲s} a=-۰/۵\frac{m}{s^۲}$$

محاسبهٔ جابه‌جایی در T ثانیهٔ nام

$$\Delta x_{n,T}=\frac{۱}{۲}a(۲n-۱)T^۲+v_۰T$$

جابه‌جایی‌های انجام‌شده توسط متحرک در T ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت $aT^۲$ می‌دهند.



جابه‌جایی در T ثانیهٔ nام $\Delta x_{n,T}=\frac{۱}{۲}a(۲n-۱)T^۲+v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ اول $\Delta x_{T,۱}=۰/۵aT^۲+v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ دوم $\Delta x_{T,۲}=۱/۵aT^۲+v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ سوم $\Delta x_{T,۳}=۲/۵aT^۲+v_۰T$

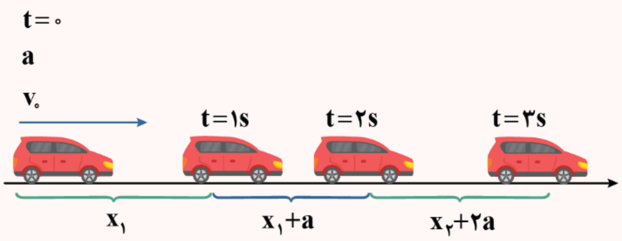
جابه‌جایی در T ثانیهٔ چهارم $\Delta x_{T,۴}=۳/۵aT^۲+v_۰T$

حالت خاص: جابه‌جایی در ثانیهٔ nام:

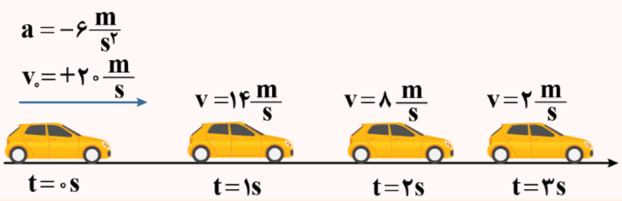
$$\Delta x_n=\frac{۱}{۲}a(۲n-۱)+v_۰$$

جابه‌جایی‌های انجام‌شده در ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت a می‌دهند.

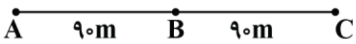
۱- در هر ثانیه جابه‌جایی یک a تغییر می‌کند.



۲- در هر ثانیه سرعت یک a تغییر می‌کند.



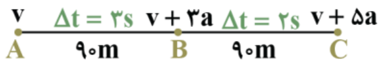
۱۶- مطابق شکل زیر، متحرکی با شتاب ثابت بر روی مسیری مستقیم در حرکت است و فاصله‌های AB و BC را به‌ترتیب در مدت $۳s$ و $۲s$ طی می‌کند. آهنگ تغییر سرعت این متحرک چند واحد SI است؟



۱) ۲/۵
۲) ۷/۵
۳) ۴
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

اگر شتاب متحرک برابر a باشد، در هر ثانیه سرعت آن به‌اندازهٔ a تغییر می‌کند، بنابراین اگر سرعت متحرک در نقطهٔ A برابر v باشد، ۳ ثانیهٔ بعد و در نقطهٔ B، سرعت آن به $v+۳a$ می‌رسد، سپس ۲ ثانیهٔ دیگر می‌گذرد و سرعت در نقطهٔ C به $v+۵a$ می‌رسد.



با نوشتن معادلهٔ مستقل از شتاب در هر قسمت از مسیر، داریم:

$$\text{AB مسیر}: \Delta x = \frac{v_A + v_B}{۲}\Delta t \Rightarrow ۹۰ = \frac{v+v+۳a}{۲} \times ۳ \Rightarrow ۲v + ۳a = ۶۰ \quad :(۱)\ \text{رابطهٔ}$$

$$\text{BC مسیر}: \Delta x = \frac{v_B + v_C}{۲}\Delta t \Rightarrow ۹۰ = \frac{v+۳a+v+۵a}{۲} \times ۲ \Rightarrow ۲v + ۸a = ۹۰ \quad :(۲)\ \text{رابطهٔ}$$

با کم کردن رابطهٔ (۱) از رابطهٔ (۲) می‌توان نوشت:

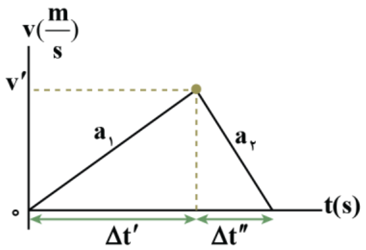
$$(۲v+۸a)-(۲v+۳a) = ۹۰ - ۶۰ \Rightarrow ۵a = ۳۰ \Rightarrow a = ۶\frac{m}{s^۲}$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- متحرکی در یک مسیر مستقیم از حال سکون با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی حرکتش با شتاب ثابت $۶\frac{m}{s^۲}$ کند می‌شود و درنهایت می‌ایستد. اگر مسافت طی‌شده در کل مسیر ۴۸۰ متر باشد، تندی متوسط در ۴ ثانیهٔ انتهایی حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۲
۲) ۲۴
۳) ۳۶
۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)



گام اول:

شیب خط مماس بر نمودار $(v-t)$ برابر شتاب لحظه‌ای است. نمودار $(v-t)$ را از ابتدا تا انتهای حرکت رسم می‌کنیم.

گام دوم:

در هر بازه‌ای که شتاب ثابت باشد $a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ است؛ بنابراین چون $a_۱ = \frac{۲}{۳}|a_۲|$ است، $\Delta t' = \frac{۳}{۲}\Delta t''$ خواهد بود.

گام سوم:

سطح زیر نمودار «جابه‌جایی» برابر $۴۸۰m$ است؛ بنابراین داریم:

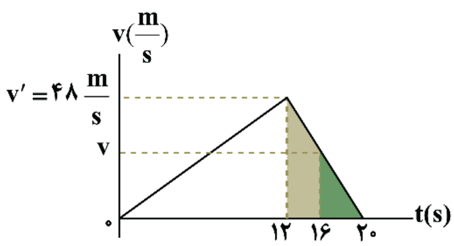
$$\begin{cases} \frac{۱}{۲} \times v' \times (\Delta t' + \Delta t'') = ۴۸۰m \\ a_۱ = ۴\frac{m}{s^۲} \Rightarrow v' = ۴\Delta t' \ \text{یا}\ |a_۲| = ۶\frac{m}{s^۲} \Rightarrow v' = ۶\Delta t'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶\Delta t''(\frac{۳}{۲}\Delta t'' + \Delta t'') = ۴۸۰m \Rightarrow ۳ \times \frac{۵}{۲} \times (\Delta t'')^۲ = ۴۸۰m$$

$$\Rightarrow (\Delta t'')^۲ = ۶۴ \Rightarrow \Delta t'' = ۸s \xrightarrow{\Delta t' = \frac{۳}{۲}\Delta t''} \Delta t' = ۱۲s\ ,\ v' = ۴۸\frac{m}{s}$$

گام چهارم:

با تناسب بین دو مثلث رنگ‌شده خواهیم داشت:



$$\frac{v}{v'} = \frac{۲۰-۱۶}{۲۰-۱۲} \Rightarrow \frac{v}{۴۸} = \frac{۴}{۸} \Rightarrow v = ۲۴\frac{m}{s}$$

همچنین به کمک معادلهٔ سرعت نیز می‌توانیم تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۱۶s$ را به‌دست آوریم:

$$v_{۱۶} + ۴ \times a = v_{۲۰} \Rightarrow v_{۱۶} + ۴(-۶) = ۰ \Rightarrow v_{۱۶} = ۲۴\frac{m}{s}$$

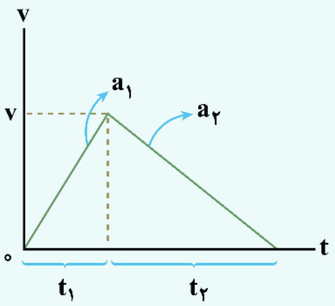
گام آخر:

کافی است سطح زیر نمودار از $t_1 = ۱۶s$ تا $t_2 = ۲۰s$ را به‌دست آوریم:

$$\ell = \frac{(۲۰-۱۶)\times ۲۴}{۲} = ۴۸\,m \Rightarrow s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۴۸}{۴} = ۱۲\frac{m}{s}$$

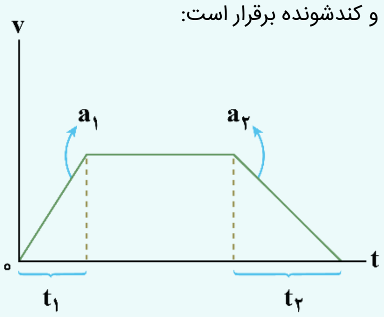
نکته

در حالتی خاص از سؤالات حرکت شتاب ثابت، متحرک از حال سکون با شتاب a_1 شروع به حرکت می‌کند و پس از گذشت t_1 ثانیه، با شتاب a_2 حرکتش کُند و متوقف می‌شود. با توجه به نمودار سرعت ـ زمان این نوع حرکت می‌توانیم بنویسیم:



$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{t_2}{t_1}$$

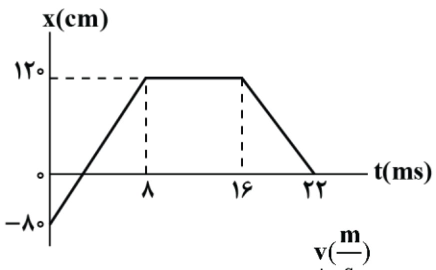
دقت کنید که اگر در بخش میانی حرکت، حرکت به‌صورت سرعت ثابت باشد، بازهم رابطهٔ فوق در بخش حرکت تندشونده و کندشونده برقرار است:

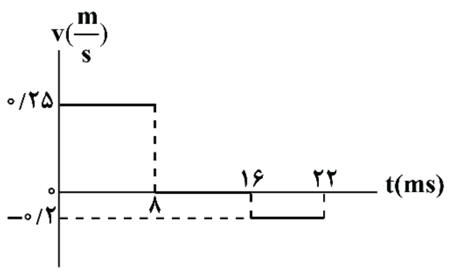


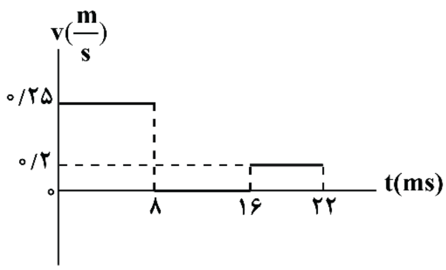
$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{t_2}{t_1}$$

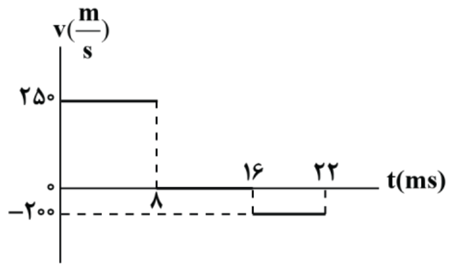
گروه آموزشی ماز

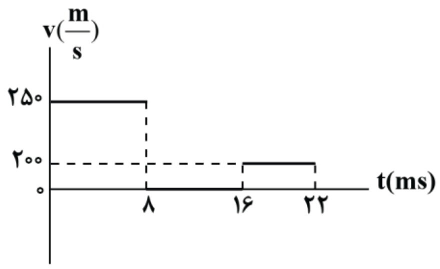
۱۸- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نشان‌دهندهٔ نمودار تندی ـ زمان این متحرک است؟



۱)


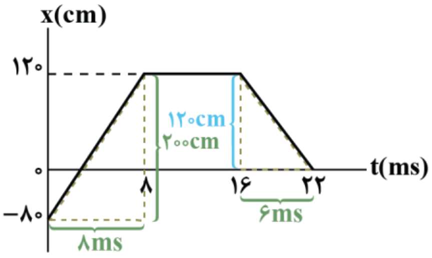
۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ نموداری ـ ۱۴۰۱)

می‌دانیم قدر مطلق شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان در هر لحظه برابر با تندی متحرک در آن لحظه است. از طرفی هم در بازه‌های زمانی که نمودار مکان ـ زمان خطی است، شیب نمودار ثابت بوده و داریم:



$$۰ \rightarrow ۸ms : v_۱ = \frac{۲۰۰cm}{۸ms} = \frac{۲۰۰ \times ۱۰^{-۲} m}{۸ \times ۱۰^{-۳} s} = ۲۵۰ \frac{m}{s}$$

$$۸ms \rightarrow ۱۶ms : v_۲ = ۰ \frac{m}{s}$$

$$۱۶ms \rightarrow ۲۲ms : v_۳ = \frac{۱۲۰cm}{۶ms} = \frac{۱۲۰ \times ۱۰^{-۲} m}{۶ \times ۱۰^{-۳} s} = ۲۰۰ \frac{m}{s}$$

بنابراین نمودار تندی ـ زمان متحرک، مطابق گزینهٔ (۴) خواهد بود.

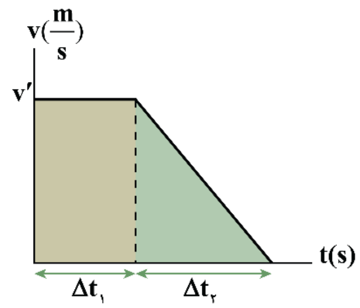
گروه آموزشی ماز

۱۹- اتومبیلی با سرعت ثابت درحال حرکت بر روی مسیر مستقیم است. ناگهان راننده مانعی را روبه‌روی خود می‌بیند و پس از مدتی ترمز می‌گیرد و طی یک حرکت شتاب ثابت، متوقف می‌شود. اگر جابه‌جایی در مدت ترمز، ۴ برابر جابه‌جایی در مدت واکنش راننده باشد، سرعت متوسط در کل حرکت چند برابر سرعت متوسط در مدت حرکت کندشونده است؟

۱) $\frac{۱۰}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۱۰}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

نمودار سرعت ـ زمان را برای این حرکت رسم می‌کنیم. با توجه به این‌که سطح محصور نمودار $v-t$ با محور t، برابر با جابه‌جایی است، خواهیم داشت:



$$۴\Delta x_۱ = \Delta x_۲ \Rightarrow ۴v'\Delta t_۱ = \frac{v'\Delta t_۲}{۲} \Rightarrow ۸\Delta t_۱ = \Delta t_۲$$

اکنون سرعت متوسط را در دو بازهٔ زمانی خواسته‌شده به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{کل حرکت}} v_{av} = \dfrac{\Delta x_۱ + \overbrace{\Delta x_۲}^{۴\Delta x_۱}}{\Delta t_۱ + \underbrace{\Delta t_۲}_{۸\Delta t_۱}} = \dfrac{۵\Delta x_۱}{۹\Delta t_۱} \\ \xrightarrow{\text{قسمت شتاب‌دار}} v_{av} = \dfrac{\overbrace{\Delta x_۲}^{۴\Delta x_۱}}{\underbrace{\Delta t_۲}_{۸\Delta t_۱}} = \dfrac{۴\Delta x_۱}{۸\Delta t_۱} = \dfrac{\Delta x_۱}{۲\Delta t_۱} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{av}\ \text{کل حرکت}}{v_{av}\ \text{قسمت شتاب‌دار}} = \frac{\frac{۵}{۹}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱۰}{۹}$$

بررسی مسائل ترمز و توقف

مسائل توقف از دو قسمت تشکیل می‌شوند:

۱- قبل از ترمز (زمان واکنش راننده):

از زمانی که راننده یک مانع را می‌بینند، تا زمانی که پدال ترمز را فشار دهد، مدتی طول می‌کشد که به این زمان، زمان واکنش (عکس‌العمل) راننده می‌گویند. در این مدت راننده هنوز ترمز نکرده و خودرو با همان سرعت اولیه حرکت می‌کند.

$$\Delta x_{\text{واکنش}} = v_۰ \Delta t_{\text{واکنش}}$$

۲- پس از ترمز (کند شدن):

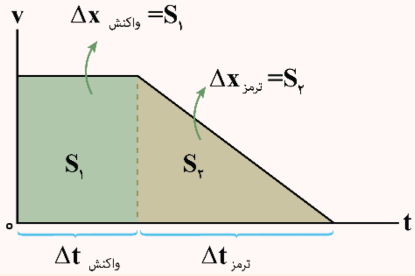
در این مدت، حرکت خودرو با شتاب ثابت a کند می‌شود. زمان و مسافت طی‌شده در هنگام ترمز برابر است با:

$$\Delta t_{\text{ترمز}} = \frac{v_\circ}{|a|} \qquad \Delta x_{\text{ترمز}} = \frac{v_\circ^۲}{|۲a|}$$

۳- کل مسافتی که خودرو طی می‌کند تا متوقف شود برابر مجموع مسافت طی‌شده در دو مرحلهٔ قبل است:

$$\Delta x_{\text{توقف}} = \Delta x_{\text{واکنش}} + \Delta x_{\text{ترمز}} = v_\circ \Delta t_{\text{واکنش}} + \frac{v_\circ^۲}{|۲a|}$$

۴- گاهی برای بررسی مسائل ترمز، می‌توانیم نمودار سرعت ـ زمان متحرک را نیز رسم کنیم.



گروه آموزشی ماز

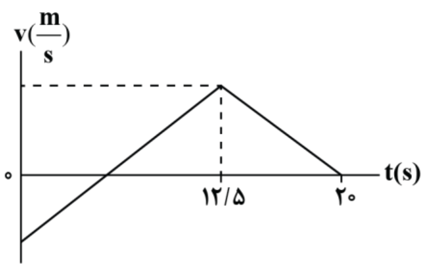
۲۰- شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که در امتداد محور x در SI درحال حرکت است. اگر شتاب متوسط حرکت در ۲۰ ثانیهٔ اول $۱\frac{m}{s^۲}$ و سرعت متوسط در مدت حرکت تندشونده $۱۵\frac{m}{s}$ باشد، این متحرک چند متر به‌صورت کندشونده حرکت کرده است؟

۱) ۶۲/۵

۲) ۱۴۲/۵

۳) ۱۵۲/۵

۴) ۱۶۲/۵

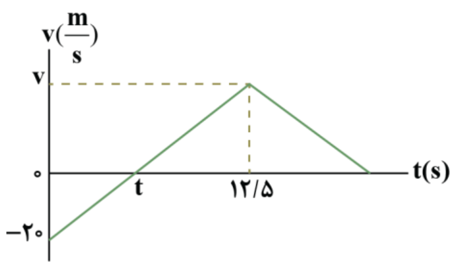


پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ نموداری ـ ۱۴۰۱)

در ۲۰ ثانیهٔ اول شتاب متوسط برابر $۱\frac{m}{s^۲}$ است، درنتیجه:

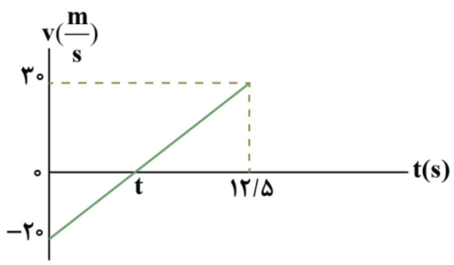
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۱ = \frac{\circ - v_\circ}{۲\circ} \Rightarrow v_\circ = -۲\circ \frac{m}{s}$$

حرکت تندشونده در بازهٔ زمانی t تا ۱۲/۵ ثانیه است. پس سرعت در لحظهٔ $t = ۱۲s$ برابر است با:



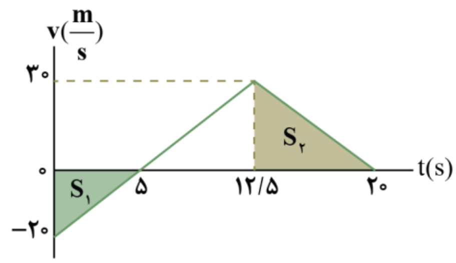
$$v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \Rightarrow ۱۵ = \frac{\circ + v}{۲} \Rightarrow v = ۳\circ \frac{m}{s}$$

حال به کمک تشابه مثلث‌ها می‌توانیم لحظهٔ t را به‌دست بیاوریم:



$$\frac{۳\circ}{۱۲/۵ - t} = \frac{۲\circ}{t} \Rightarrow ۳t = ۲۵ - ۲t \Rightarrow ۵t = ۲۵ \Rightarrow t = ۵s$$

مجموع مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$، برابر مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی است که متحرک کندشونده در حرکت بوده است.

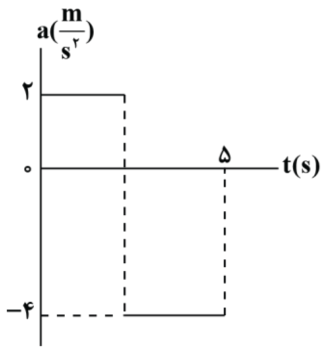


$$\ell = S_۱ + S_۲ = \frac{۲۰\times ۵}{۲} + \frac{۷/۵\times ۳۰}{۲} = ۵۰ + ۱۱۲/۵ \Rightarrow \ell = ۱۶۲/۵\text{m}$$

گروه آموزشی ماز

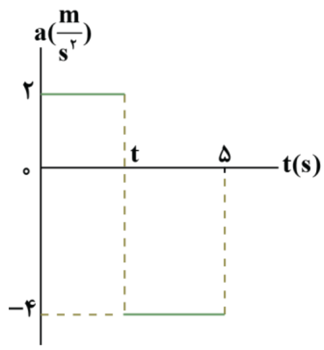
۲۱- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در لحظهٔ $t=۰$ بر روی محور x از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیهٔ اول حرکت برابر ۲- متر باشد، مسافت پیموده‌شده توسط متحرک در همین مدت چند متر است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸



پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ نموداری ـ ۱۴۰۱)

در حرکت با شتاب ثابت داریم:



$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t$$

$$v = v_۰ + at \Rightarrow v_t = ۰ + ۲t = ۲t$$

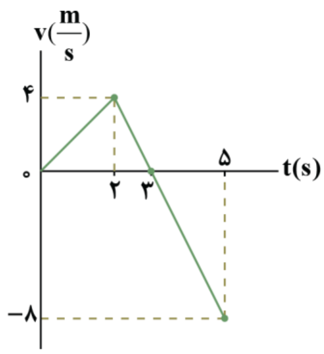
$$\Delta x_t = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = \left(\frac{۱}{۲}\times ۲\times t^۲ + ۰\times t\right) + \left(\frac{۱}{۲}\times(-۴)\times(۵-t)^۲ + ۲t(۵-t)\right)$$

$$\Rightarrow \Delta x_t = t^۲ - ۲(۵-t)^۲ + ۲t(۵-t) = -۲$$

با بسط و مرتب‌سازی معادلهٔ فوق داریم:

$$-۳t^۲ + ۳۰t - ۴۸ = ۰ \Rightarrow t^۲ - ۱۰t + ۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲s\ (\checkmark) \\ t = ۸s \Rightarrow t < ۵ \Rightarrow \text{غیر قابل قبول } t = ۸s\ (\times) \end{cases}$$

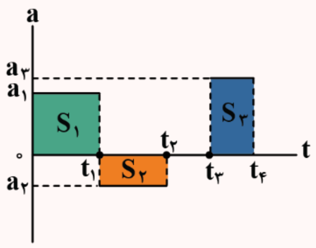
بهترین راه برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده رسم نمودار $v-t$ و محاسبهٔ مساحت محصور در نمودار است. نمودار سرعت ـ زمان متحرک مطابق شکل است.



$$S = L = \frac{۳\times ۴}{۲} + \frac{۲\times ۸}{۲} = ۶ + ۸ = ۱۴\text{m}$$

نمودار شتاب ـ زمان

در حرکت با شتاب ثابت، نمودار شتاب ـ زمان، خطی موازی محور زمان می‌باشد. اگر شتاب ثابت حرکت در هر بازهٔ زمانی با بازهٔ دیگر در طول حرکت متفاوت باشد، نمودار به شکل زیر، پله‌ای خواهد بود و مساحت زیر نمودار در هر بخش، با تغییرات سرعت در آن بازهٔ زمانی برابر است:



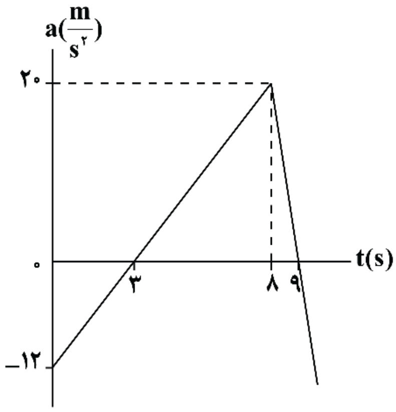
$$\Delta v = +S_1 - S_2 + S_3$$

در بازهٔ t_2 تا t_3 شتاب صفر است.

گروه‌آموزشی ماز

۲۲- **شکل زیر، نمودار شتاب ـ زمان متحرکی در حرکت روی خط راست را نشان می‌دهد. اگر جهت حرکت متحرک در پایان ثانیهٔ نهم حرکت تغییر کرده باشد، سرعت متحرک در مبدأ زمان چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۴۲-
۲) ۲۱-
۳) ۲۱
۴) ۴۲



پاسخ: گزینهٔ ۱ — (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

نکته

سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان نشانگر تغییرات سرعت است.

گام اول:

اولین شرط تغییر جهت، صفر شدن سرعت است؛ بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 9s$ صفر می‌باشد. تغییرات سرعت در هرکدام از بازه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$0 < t < 3s \Rightarrow \Delta v_1 = -(\frac{12 \times 3}{2}) \Rightarrow \Delta v_1 = -18\frac{m}{s}$$

با توجه به این‌که نمودار $v-t$ پایین محور t است، تغییرات سرعت در این بازه منفی خواهد بود.

$$3s < t < 9s \Rightarrow \Delta v_2 = \frac{6 \times 20}{2} \Rightarrow \Delta v_2 = 60\frac{m}{s}$$

با توجه به این‌که نمودار $v-t$ بالای محور t است، تغییرات سرعت در این بازه مثبت خواهد بود.

گام آخر:

با توجه به صفر شدن سرعت در لحظهٔ $t = 9s$ می‌توان نوشت:

$$v_0 + \Delta v_1 + \Delta v_2 = 0 \Rightarrow v_0 - 18 + 60 = 0 \Rightarrow v_0 = -42\frac{m}{s}$$

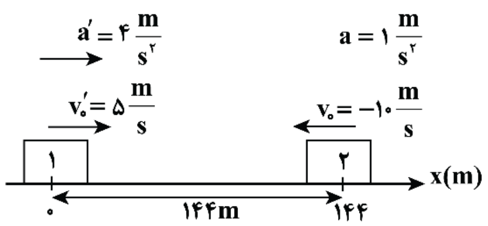
گروه‌آموزشی ماز

۲۳- **متحرکی با تندی $5\frac{m}{s}$ در جهت محور x و متحرک دیگری با تندی $10\frac{m}{s}$ در خلاف جهت محور x به سمت یکدیگر درحال حرکت‌اند. هنگامی که فاصلهٔ آن‌ها به ۱۴۴ متر می‌رسد، اولی تندی خود را با شتاب $4\frac{m}{s^2}$ افزایش و دومی تندی خود را با شتاب $1\frac{m}{s^2}$ کاهش می‌دهد. دو متحرک پس از چند ثانیه به‌هم می‌رسند؟**

۱) ۶
۲) ۱۰
۳) ۴
۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

در این سؤالات سعی کنید برای درک بهتر و سازمان‌دهی داده‌ها ترسیمی ساده از مسئله رسم کنید. مکان متحرک اول را مبدأ و جهت محور x را جهت مثبت درنظر می‌گیریم.



$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$\frac{1}{2}\times 4\times t^2 + 5t = \frac{1}{2}\times 1\times t^2 - 10t + 144$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}t^2 + 15t - 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 6s & (\checkmark) \\ t = -16s & (\times) \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

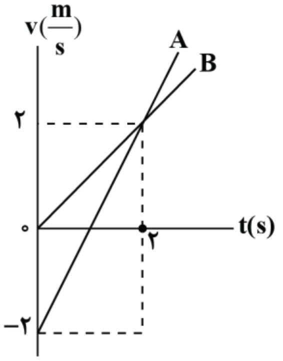
۲۴- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک که هم‌زمان از یک نقطه شروع به حرکت می‌کنند مطابق شکل زیر است. چند ثانیه پس از شروع حرکت، فاصلهٔ دو متحرک به ۳۰ متر می‌رسد؟

۱) ۳ و ۱

۲) ۷

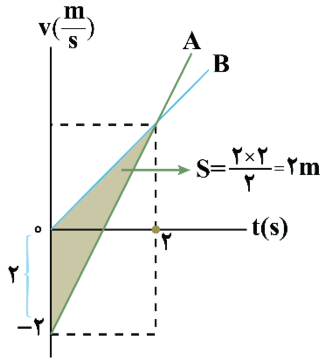
۳) ۸

۴) ۱۰

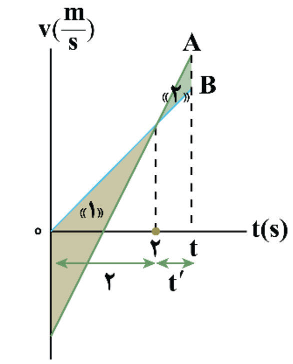


پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۴۰۱)

مطابق شکل مقابل فاصلهٔ دو متحرک را در لحظهٔ رسیدن به یکدیگر به‌دست می‌آوریم:



بنابراین در لحظهٔ $t = 2s$ متحرک A، ۲ متر عقب‌تر از متحرک B است.



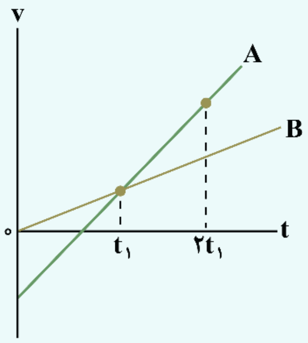
با توجه به این‌که پس از لحظهٔ $t = 2s$ همواره نمودار $v-t$ متحرک A بالاتر از متحرک B قرار دارد، هیچ‌گاه امکان ندارد، متحرک B، ۳۰ متر از متحرک A جلوتر باشد. از طرفی برای این‌که متحرک A بخواهد ۳۰ متر از متحرک B جلو بیفتد، باید مساحت زیر نمودار $v-t$ آن پس از لحظهٔ $t = 2s$، ۳۲ متر بیش‌تر از متحرک B باشد، تا آن ۲ متر عقب‌مانده را هم جبران کند. درنتیجه با توجه به تشابه دو مثلث زیر، درمی‌یابیم در لحظهٔ $t_2 = 10s$ فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر ۳۰ متر می‌شود.

$$\frac{S_2}{S_1} = (\frac{t'}{2})^2 \Rightarrow \frac{32}{2} = (\frac{t'}{2})^2$$

$$\Rightarrow t' = 8s \Rightarrow t = t' + 2 = 10s$$

نکته

هنگامی که دو متحرک از مکان یکسانی با شتاب ثابت در لحظهٔ $t = ۰$ عبور می‌کنند و نمودار سرعت ـ زمان آن‌ها به شکل زیر است، می‌توان نکات زیر را نتیجه گرفت:



۱- در بازهٔ $۰ < t < t_۱$، سرعت B بیش‌تر از A است؛ بنابراین B از A جلو می‌افتد.
در این بازه فاصلهٔ دو متحرک افزایش می‌یابد.

۲- در بازهٔ $t_۱ < t < ۲t_۱$، سرعت A بیش‌تر از B است و درنتیجه متحرک A، فاصله را جبران می‌کند و در لحظهٔ $t = ۲t_۱$، دو متحرک به‌هم می‌رسند. در این بازه، فاصلهٔ دو متحرک کاهش می‌یابد.

۳- در لحظات پس از $t = ۲t_۱$، متحرک A، فاصلهٔ خود تا B را افزایش می‌دهد و از آن دور و دورتر می‌شود.

گروه آموزشی ماز

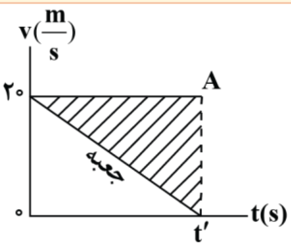
۲۵- دو کامیون A و B با تندی ثابت $۷۲ \frac{km}{h}$ با فاصلهٔ ۱۰۰ متر از یکدیگر مطابق شکل در یک جهت حرکت می‌کنند. ناگهان در لحظهٔ $t = ۰$، از کامیون A جعبه‌ای سقوط می‌کند. هنگامی که جعبه براثر حرکت شتاب ثابت خود بر روی جاده متوقف می‌شود، فاصلهٔ کامیون A از آن ۴۰ متر می‌شود. اگر در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ فاصلهٔ کامیون B از جعبه ۹۰ متر باشد، $\frac{t_۲}{t_۱}$ کدام است؟ (سرعت اولیهٔ جعبه را با سرعت کامیون A برابر فرض کنید.)

۱) ۵
۲) ۷
۳) $\frac{۲۳}{۴}$
۴) $\frac{۲۳}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

مناسب‌تر است با نمودار $v - t$ مسئله را بررسی کنیم.

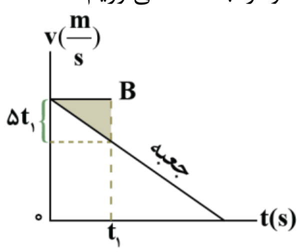
ابتدا لحظهٔ توقف جعبه را به کمک فاصلهٔ آن با کامیون A به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{۲۰t'}{۲} = ۴۰ \Rightarrow t' = ۴s$$

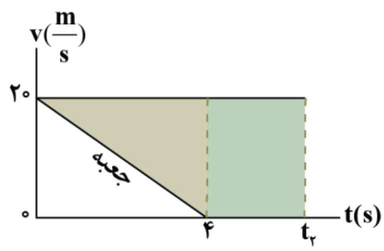
همچنین مشخص است که شتاب جعبه که همان شیب نمودار سرعت ـ زمان است، برابر $-\frac{۲۰}{۴} = -۵ \frac{m}{s^۲}$ می‌باشد.

اکنون فاصلهٔ کامیون B تا جعبه را در دو لحظه‌ای که دارای فاصلهٔ ۹۰ متری از یکدیگر هستند را با استفاده از سطح بین دو نمودار، به‌دست می‌آوریم.
فاصلهٔ اولیهٔ کامیون B با جعبه ۱۰۰m است. درنتیجه برای این‌که اولین بار این فاصله به ۹۰m برسد، باید این دو ۱۰m به یکدیگر نزدیک شوند. پس سطح بین دو نمودار باید برابر با ۱۰m شود.



$$\frac{(۵t_۱)(t_۱)}{۲} = ۱۰ \Rightarrow t_۱ = ۲s$$

با توجه به این‌که فاصلهٔ اولیهٔ کامیون B از جعبه ۱۰۰m است، هنگامی فاصلهٔ این دو متحرک برای دومین بار به ۹۰m می‌رسد که ۱۹۰m نسبت به یکدیگر حرکت کنند.
درنتیجه سطح بین دو نمودار باید ۱۹۰m شود.



$$\frac{(t_۲ + (t_۲ - ۴))۲۰}{۲} = ۱۹۰ \Rightarrow t_۲ = ۱۱/۵s$$

در پایان نسبت $\frac{t_۲}{t_۱}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۱۱/۵}{۲} = \frac{۲۳}{۴}$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- در شرایط خلأ گلوله‌ای از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌شود. به‌ترتیب از راست به چپ، گلوله چند ثانیه بعد به زمین برخورد می‌کند و اندازهٔ سرعت متوسط گلوله از لحظهٔ رها شدن تا لحظهٔ رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) ۴ و ۴۰ ۲) ۴ و ۲۰ ۳) ۲ و ۴۰ ۴) ۲ و ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

گام اول:

زمان سقوط گلوله برابر است با:

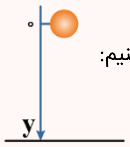
$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -80=-5t^2 \Rightarrow t^2=16 \Rightarrow t=4s$$

گام آخر:

برای محاسبهٔ سرعت متوسط در کل مدت سقوط می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{-80}{4}=-20\frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}|=20\frac{m}{s}$$

سقوط آزاد



به حرکت جسمی که فقط تحت تأثیر جاذبهٔ گرانشی در نزدیکی سطح زمین سقوط می‌کند درصورتی‌که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، سقوط آزاد گویند.
برای راحتی کار در حل سؤالات سقوط آزاد، نقطهٔ رها شدن جسم را مبدأ مختصات درنظر می‌گیریم و جهت مثبت محور y را به سمت پایین انتخاب می‌کنیم:
در این صورت علامت شتاب و مکان و سرعت در هر لحظه مثبت خواهد شد.

معادله‌های سقوط آزاد درصورت رها شدن جسم بدون سرعت اولیه

۱- معادلهٔ مکان ـ زمان:

$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0 \xrightarrow[v_0=0]{y_0=0} y=\frac{1}{2}gt^2$$

۲- معادلهٔ سرعت ـ زمان:

$$v=gt+v_0 \xrightarrow{v_0=0} v=gt$$

۳- معادلهٔ مستقل از زمان:

$$v_2^2-v_1^2=2g\Delta y$$

۴- معادلهٔ سرعت متوسط:

$$v_{av}=\frac{1}{2}gt$$

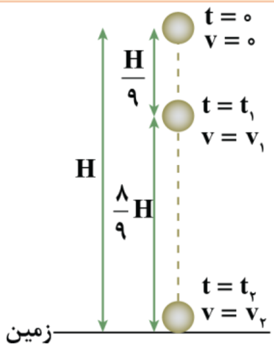
گروه آموزشی ماز

۲۷- گلوله‌ای در لحظهٔ $t=0$ از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. گلوله در لحظهٔ t_1 با اندازهٔ سرعت v_1 از ارتفاع $\frac{8}{9}H$ عبور می‌کند و در لحظهٔ t_2 با اندازهٔ سرعت v_2 به زمین برخورد می‌کند. به‌ترتیب از راست به چپ، نسبت‌های $\frac{t_2}{t_1}$ و $\frac{v_2}{v_1}$ کدام‌اند؟

۱) ۳ و ۳ ۲) ۳ و ۹ ۳) ۹ و ۳ ۴) ۹ و ۹

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

شکل مقابل مسیر حرکت گلوله را نشان می‌دهد. برای مقایسهٔ زمان‌های t_1 و t_2 می‌توان نوشت:



$$|\Delta y|=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{H}{9}=\frac{1}{2}gt_1^2 \\ H=\frac{1}{2}gt_2^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم رابطه‌ها}} \frac{H}{\frac{H}{9}}=(\frac{t_2}{t_1})^2 \Rightarrow (\frac{t_2}{t_1})^2=9 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1}=3$$

برای مقایسهٔ سرعت‌های v_1 و v_2 داریم:

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \Rightarrow \begin{cases} v_1^2 = 2g \times \dfrac{H}{9} \\ v_2^2 = 2g \times H \end{cases} \Rightarrow \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{H}{\frac{H}{9}} = 9 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = 3$$

نکات طلایی

۱- هنگامی که یک گلوله را در شرایط خلأ از ارتفاع h رها می‌کنیم، زمان رسیدن آن به زمین برابر است با:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

بنابراین برای مقایسهٔ زمان سقوط دو گلوله می‌توان نوشت:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow \frac{t_B}{t_A} = \sqrt{\frac{h_B}{h_A}}$$

۲- هنگامی که یک گلوله را در شرایط خلأ از ارتفاع h رها می‌کنیم، تندی آن هنگام رسیدن به زمین برابر است با:

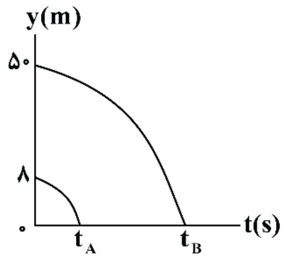
$$v^2 - \cancel{v_0^2} = 2gh \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

بنابراین برای مقایسهٔ تندی دو گلوله هنگام رسیدن به زمین می‌توان نوشت:

$$v = \sqrt{2gh} \rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{h_B}{h_A}}$$

گروه آموزشی ماز

۲۸- نمودار مکان ـ زمان دو گلولهٔ A و B که در خلأ از ارتفاع‌های متفاوتی نسبت به زمین رها شده‌اند، مطابق شکل زیر است. در این نمودار کدام $\frac{t_A}{t_B}$ است؟ (سطح زمین مبدأ مکان درنظر گرفته شده است.)



۱) $\frac{4}{25}$　　۲) $\frac{25}{4}$

۳) $\frac{2}{5}$　　۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳　　(متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

طبق رابطهٔ $\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2$، $\frac{t_A}{t_B}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y_A}{\Delta y_B} = \left(\frac{t_A}{t_B}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{-8}{-50} = \left(\frac{t_A}{t_B}\right)^2 \Rightarrow \frac{t_A}{t_B} = \frac{2}{5}$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع بلندی نسبت به سطح زمین در لحظهٔ $t = 0$ رها می‌شود. اندازهٔ جابه‌جایی گلوله در ثانیهٔ ششم چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن در ثانیهٔ چهارم است؟

۱) $\frac{7}{9}$　　۲) $\frac{9}{7}$　　۳) $\frac{7}{11}$　　۴) $\frac{11}{7}$

پاسخ: گزینهٔ ۴　　(آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

اندازهٔ جابه‌جایی گلوله در ثانیهٔ nام از رابطهٔ $|\Delta y_n| = (n - 0/5)g$ به‌دست می‌آید:

$$\left|\frac{\Delta y_6}{\Delta y_4}\right| = \left|\frac{(6 - 0/5)g}{(4 - 0/5)g}\right| = \left|\frac{5/5}{3/5}\right| = \frac{11}{7}$$

نکته

در حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه، جابه‌جایی در ثانیهٔ nام را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

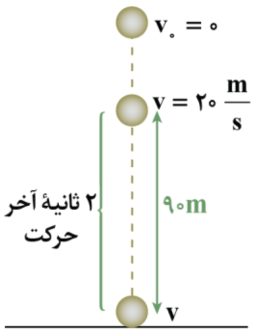
$$\Delta y_n = \frac{1}{2} g(2n-1)$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- سنگی از بام ساختمانی بدون سرعت اولیه و در شرایط خلأ به‌طرف زمین رها می‌شود. اگر سنگ در ۲ ثانیهٔ آخر حرکت خود ۹۰ متر را طی کند، ارتفاع ساختمان چند متر است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۵۱/۲۵ ۴) ۱۰۱/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)



با توجه به ثابت بودن شتاب $g = 10\frac{m}{s^2}$، در هر ثانیه $10\frac{m}{s}$ بر سرعت رو به پایین سنگ افزوده می‌شود. با توجه به شکل مقابل و رابطهٔ مستقل از شتاب داریم:

$$\Delta y = \frac{v_1 + v_2}{2}\Delta t \Rightarrow 90 = \frac{v + v - 20}{2} \times 2$$

$$\Rightarrow 2v - 20 = 90 \Rightarrow v = 55\frac{m}{s}$$

برای به‌دست آوردن ارتفاع گلوله، در کل حرکت از رابطهٔ مستقل از زمان کمک می‌گیریم.

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \Rightarrow 55^2 - 0 = 2 \times 10 \times h$$

$$\Rightarrow h = \frac{55^2}{20} = 151/25m$$

گروه آموزشی ماز

فصل ۱ فیزیک دوازدهم

«جمع‌بندی فشرده»

حرکت‌شناسی

- **مفهوم اولیهٔ حرکت**
  - مسافت طی‌شده و جابه‌جایی
  - معرفی نمودار مکان ـ زمان: برای توصیف حرکت یک جسم می‌توان از نمودار مکان ـ زمان که مکان جسم را در هر لحظه نشان می‌دهد، استفاده کرد. برای رسم این نمودار، زمان را روی محور افقی و مکان را روی محور قائم درنظر می‌گیریم.
- **تندی و سرعت**
  - تندی متوسط: تندی متوسط، کمیتی نرده‌ای است که برابر با نسبت مسافت پیموده‌شده به مدت‌زمان سپری‌شده است و یکای آن در SI، متر بر ثانیه است. $s_{av} = \frac{L}{\Delta t}$
  - سرعت متوسط: کمیتی برداری است و برابر است با نسبت جابه‌جایی متحرک به مدت‌زمان سپری‌شده و یکای آن در SI، متر بر ثانیه است. $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
  - تعیین سرعت متوسط به کمک نمودار مکان ـ زمان: سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه از زمان برابر شیب پاره‌خطی است که نقاط نظیر آن دو لحظه در نمودار مکان ـ زمان را به یکدیگر وصل می‌کند.
  - تعیین تندی متوسط به کمک نمودار مکان ـ زمان: برای به‌دست آوردن تندی متوسط متحرک بین دو لحظه از زمان باید مسیر حرکت را روی محور عمودی دنبال کنید و با مجموع آن‌ها و تقسیم بر بازهٔ زمانی مدنظر، تندی متوسط را به‌دست آورید.
  - تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای: تندی متحرک در هر لحظه از زمان را تندی لحظه‌ای می‌نامند. اگر هنگام گزارش تندی لحظه‌ای، به جهت حرکت متحرک نیز اشاره شود، درواقع سرعت لحظه‌ای آن را که کمیتی برداری است بیان کرده‌ایم.
  - تعیین سرعت لحظه‌ای به کمک نمودار مکان ـ زمان: اگر هنگام گزارش تندی لحظه‌ای، به جهت حرکت متحرک نیز اشاره شود، درواقع سرعت لحظه‌ای آن را که کمیتی برداری است بیان کرده‌ایم.
- **معرفی شتاب**
  - معرفی نمودار سرعت ـ زمان: در نمودار سرعت-زمان نقاطی که نمودار از محور t عبور می‌کند، تغییر جهت متحرک را نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که صرفاً برخورد نمودار به محور t برای تغییر جهت کافی <u>نیست</u> و باید از آن عبور کند.
  - شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای: هرگاه سرعت جسمی تغییر کند، حرکت آن شتاب‌دار می‌شود. با توجه به این‌که بردار سرعت در هر نقطه از مسیر، بر مسیر حرکت مماس است، تغییر سرعت جسم در نقاط مختلف مسیر می‌تواند به‌دلیل تغییر در اندازهٔ بردار سرعت (تندی) جسم باشد، یا می‌تواند به‌دلیل تغییر در جهت بردار سرعت آن باشد، یا همچنین می‌تواند به‌دلیل تغییر در اندازه و جهت بردار سرعت متحرک باشد. $a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
  - حرکت تندشونده و کندشونده: حرکت تندشونده: حرکتی است که در آن اندازهٔ سرعت متحرک (صرف‌نظر از جهت حرکت) با گذشت زمان افزایش می‌یابد. در حرکت تندشونده، حاصل‌ضرب سرعت در شتاب، مقداری مثبت است. حرکت کندشونده: حرکتی است که در آن اندازهٔ سرعت متحرک (صرف‌نظر از جهت حرکت) با گذشت زمان، کاهش می‌یابد. در حرکت کندشونده، حاصل‌ضرب سرعت و شتاب مقداری منفی است.
- **حرکت با سرعت ثابت**
  - معرفی حرکت با سرعت ثابت: در این نوع حرکت، اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است. شیب نمودار مکان ـ زمان متحرک در طول حرکت ثابت و درنتیجه سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه، برابر سرعت لحظه‌ای آن است. $x = vt + x_0$
- **حرکت با شتاب ثابت**
  - معرفی حرکت با شتاب ثابت: اگر شتاب متحرک ثابت باشد (حواست باشه هم اندازه و هم جهتش ثابت باشه) آن‌گاه $a = a_{av}$ می‌شود. $v = at + v_0$
  - رابطهٔ مستقل از زمان: $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$
  - نمودار شتاب ـ زمان: در حرکت شتاب ثابت، نمودار شتاب ـ زمان خطی موازی محور t است.
- **معادلهٔ مکان-زمان در حرکت با شتاب ثابت**: $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ یا $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$